1 Θεώρημα $BEZOUT$

Ο δακτύλιος $K[x_1, ..., x_n]$ είναι περιοχή μονοσήμαντης ανάλυσης. Άρα κάθε πολυώνυμο $f \in K[x_1, ..., x_n]$ (που δεν είναι σταθερά, δηλαδή $f \notin K$) αναλύεται σε γινόμενο αναγώγων πολυωνύμων, δηλαδή

$$f = f_1 \cdot f_2 \ldots \cdot f_s.$$

Θεώρημα 1 Αν $f = f_1 \cdot f_2 \ldots \cdot f_s \in K[x_1, ..., x_n]$ τότε

$$V(f) = V(f_1 \cdot f_2 \ldots \cdot f_s) = V(f_1) \cup ... \cup V(f_s).$$

Όπου $V(f) = \{(u_1, ..., u_n) \in K^n | f(u_1, ..., u_n) = 0\}$.

Απόδειξη Έστω $u = (u_1, ..., u_n) \in K^n$ και $u \in V(f) = V(f_1 \cdot f_2 \ldots \cdot f_s)$, τότε $f_1 \cdot f_2 \ldots \cdot f_s(u) = f_1(u) \cdot f_2(u) \ldots \cdot f_s(u) = 0$. Άρα $f_i(u) = 0$ για κάποιο $i \in 1, ..., s$, αφού K είναι σώμα και άρα ακέραια περιοχή. Συνεπώς $u \in V(f_i)$ και άρα $u \in V(f_1) \cup ... \cup V(f_s)$. Αντίστροφα αν $u \in V(f_1) \cup ... \cup V(f_s)$ τότε υπάρχει $i \in 1, ..., s$ τέτοιο ώστε $u \in V(f_i)$. Δηλαδή $f_i(u) = 0$ και άρα $f_1 \cdot f_2 \ldots \cdot f_s(u) = 0$. Συνεπώς $u \in V(f) = V(f_1 \cdot f_2 \ldots \cdot f_s)$.

Αν $f \in K[x, y]$ τότε $V(f)$ λέγεται **επίπεδη αλγεβρική καμπύλη** και οι καμπύλες $V(f_1), ..., V(f_s)$ λέγονται **συνιστώσες** της καμπύλης $V(f)$. Αν $f_1, ..., f_s$ είναι ανάγωγα πολυώνυμα τότε οι καμπύλες $V(f_1), ..., V(f_s)$ λέγονται **ανάγωγες συνιστώσες** της καμπύλης $V(f)$.

Αν $F \in K[X, Y, Z]$ είναι ομογενές πολυώνυμο τότε

$$V(F) = \{(u_1, u_2, u_3) \in P_K^2 | F(u_1, u_2, u_3) = 0\}$$

λέγεται **επίπεδη προβολική αλγεβρική καμπύλη** και αν τα $F_1, ..., F_s$ είναι ανάγωγα ομογενή πολυώνυμα τέτοια ώστε $F = F_1 \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot F_s$ τότε οι καμπύλες $V(F_1), ..., V(F_s)$ λέγονται **ανάγωγες συνιστώσες** της προβολικής καμπύλης $V(F)$.

Θεώρημα 2 (*Ασθενές Θεώρημα του Bezout*) Αν δύο καμπύλες βαθμού n και m αντίστοιχα έχουν περισσότερα από nm κοινά σημεία τότε έχουν κοινή συνιστώσα.

Το ασθενές Θεώρημα *Bezout* ισχύει στο πραγματικό επίπεδο, στο μιγαδικό επίπεδο αλλά και στο προβολικό πάνω απο τους πραγματικούς είτε τους μιγαδικούς. Το ισχυρό Θεώρημα του *Bezout* θα επιθυμούσαμε να λέει ότι δύο αλγεβρικές καμπύλες που δεν έχουν κοινή συνιστώσα έχουν ακριβώς τόσα κοινά σημεία όσα το γινόμενο των βαθμών τους. Αυτό όμως δεν ισχύει γενικά, ακόμη και αν θεωρήσουμε και τα σημεία στο άπειρο αλλά και τα μιγαδικά σημεία. (Για παράδειγμα ένας κύκλος και μια εφαπτόμενη ευθεία σε ένα σημείο του κύκλου έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, αντί για δύο που είναι το γινόμενο των βαθμών τους.) Εδώ αξίζει να αναφέρουμε την άποψη του *Abhyankar*, ενός Ινδού, μεγάλου μαθηματικού: **Θεώρημα δεν είναι μια σωστή μαθηματική πρόταση, αλλά μάλλον μια όμορφη πρόταση που την κάνουμε εμείς να**

είναι σωστή. Για να έχουμε, λοιπόν, μια όμορφη πρόταση αντιστοιχούμε σε κάθε σημείο τομής P έναν ακέραιο $I_P(F,G)$ που θα μετρά την *πολλαπλότητα τομής* στο σημείο αυτό των δύο καμπυλών. Προκύπτει, έτσι η παρακάτω πρόταση:

Θεώρημα 3 (*Ισχυρό Θεώρημα του Bezout*) Αν δύο καμπύλες $V(F), V(G)$, του προβολικού μιγαδικού επιπέδου, βαθμού n και m αντίστοιχα δεν έχουν κοινή συνιστώσα τότε

$$\sum I_P(F,G) = mn.$$

Στο παράδειγμα του κύκλου και της εφαπτομένης ο αριθμός $I_P(F,G)$ θα πρέπει να είναι δύο. Η πολλαπλότητα τομής για επίπεδες καμπύλες μπορεί να οριστεί σχετικά εύκολα, ώστε να ισχύει το θεώρημα του $Bezout$. Γενικά όμως, η έννοια της πολλαπλότητας τομής δύο ή περισσότερων αλγεβρικών πολυπτύχων είναι μια από τις δυσκολότερες έννοιες των Μαθηματικών και χρειάστηκαν περισσότερα από 300 χρόνια γαι να έχουμε μια ικανοποιητική κατανόησή της. Το 1983 οι $W.Fulton$ και $R.Mac\ Pherson$ παρουσίασαν μια εντυπωσιακή θεωρία για την πολλαπλότητα τομής. Παρόλα αυτά όμως, προβλήματα που σχετίζονται άμεσα με το θεώρημα του $Bezout$ θα απασχολούν για αιώνες ακόμα τους μαθηματικούς.

ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Αρκετά προβλήματα σε αλγεβρικές καμπύλες ζητούν την εύρεση μιας αλγεβρικής καμπύλης βαθμού d, που να ικανοποιεί ορισμένες συνθήκες π.χ. να διέρχεται από ορισμένα σημεία, να εφάπτεται σε δοσμένες ευθείες ή κωνικές, να έχει κάπου ιδιόμορφο σημείο πολλαπλότητας k, ή συγκεκριμένες εφαπτόμενες στο ιδιόμορφο σημείο, κ.λ.π.. Η εξίσωση μιας επίπεδης καμπύλης βαθμού d στο προβολικό επίπεδο είναι της μορφής

$$a_1M_1 + ... + a_NM_N = 0,$$

όπου τα M_i είναι όλα τα μονώνυμα βαθμού d με μια συγκεκριμένη σειρά και N είναι ο αριθμός όλων των μονωνύμων βαθμού d στις μεταβλητές X, Y, Z με

$$N = \frac{(d+1)(d+2)}{2}.$$

Παράδειγμα 4 Οι δευτεροβάθμιες καμπύλες στο προβολικό επίπεδο έχουν εξισώσεις της μορφής

$$a_1X^2 + a_2XY + a_3XZ + a_4Y^2 + a_5YZ + a_6Z^2 = 0.$$

Ενώ οι τριτοβάθμιες καμπύλες στο προβολικό επίπεδο έχουν εξισώσεις της μορφής

$$a_1X^3+a_2X^2Y+a_3X^2Z+a_4XY^2+a_5XYZ+a_6XZ^2+a_7Y^3+a_8Y^2Z+a_9YZ^2+a_10Z^3 = 0.$$

Παρατηρούμε ότι για να είναι η παραπάνω καμπύλη βαθμού d

1. τουλάχιστον ένας από τους συντελεστές a_i είναι διάφορος του μηδενός και
2. για $s \neq 0$ η εξίσωση
$$sa_1M_1 + ... + sa_NM_N = 0$$
παριστάνει την ίδια καμπύλη.

Άρα σε κάθε καμπύλη βαθμού d αντιστοιχεί ένα ακριβώς σημείο του προβολικού χώρου P^{N-1} και σε κάθε σημείο του P^{N-1} αντιστοιχεί μία ακριβώς καμπύλη βαθμού d. Η απεικόνιση είναι η προφανής: στην καμπύλη με εξίσωση

$$a_1M_1 + ... + a_NM_N = 0$$

αντιστοιχεί το σημείο του P^{N-1} με συντεταγμένες $(a_1, ..., a_n)$.

Πρόταση 5 Οι επίπεδες καμπύλες βαθμού d αποτελούν ένα προβολικό χώρο διάστασης $N - 1 = \frac{d(d+3)}{2}$.

Παράδειγμα 6 Οι ευθείες στο προβολικό επίπεδο αποτελούν ένα προβολικό επίπεδο (το δυϊκό του P^2). Οι δευτεροβάθμιες καμπύλες στο προβολικό επίπεδο αποτελούν ένα προβολικό χώρο διάστασης 5, τον P^5. Οι τριτοβάθμιες καμπύλες στο προβολικό επίπεδο αποτελούν έναν προβολικό χώρο διάστασης 9, τον P^9.

Αν βάλουμε κάποιες συνθήκες στις καμπύλες βαθμού d, τότε οι καμπύλες που τις ικανοποιούν αποτελούν ένα υποσύνολο του P^N. Αν οι συνθήκες αυτές εκφράζονται σαν γραμμικές σχέσεις των $a_1, ..., a_N$, τότε το υποσύνολο αυτό ονομάζεται **γραμμικό σύστημα**. Χρησιμοποιώντας γραμμικά συστήματα μπορούμε να αποδείξουμε διάφορα θεωρήματα.

Παράδειγμα 7 Βρείτε όλες τις κωνικές που διέρχονται από το σημείο $(1, 2, 0)$.

Για να προσδιορίσουμε μια κωνική $a_1X^2+a_2XY+a_3XZ+a_4Y^2+a_5YZ+a_6Z^2 = 0$ πρέπει να προσδιορίσουμε τους συντελεστές $a_1, ..., a_6$. Ξέρουμε ότι το σημείο $(1, 2, 0)$ είναι σημείο της κωνικής, άρα $a_11^2 + a_22 + a_30 + a_42^2 + a_50 + a_60 = 0$, δηλαδή $a_1 + 2a_2 + 4a_4 = 0$. Οι συντελεστές της κωνικής πρέπει να ικανοποιούν τη σχέση $a_1 + 2a_2 + 4a_4 = 0$ ή διαφορετικά τα σημεία του P^6 που αντιστοιχούν σε κωνικές που διέρχονται από το σημείο $(1, 2, 0)$ βρίσκονται στο υπερεπίπεδο $X_1 + 2X_2 + 4X_4 = 0$, άρα αποτελούν ένα γραμμικό σύστημα του P^5 διάστασης 4.

Παράδειγμα 8 Βρείτε όλες τις κωνικές που διέρχονται από τα σημεία $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(1, 1, 1)$.

Για να προσδιορίσουμε μια κωνική

$$a_1X^2 + a_2XY + a_3XZ + a_4Y^2 + a_5YZ + a_6Z^2 = 0$$

πρέπει να προσδιορίσουμε τους συντελεστές $a_1, ..., a_6$. Τα σημεία $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(1, 1, 1)$ είναι σημεία της κωνικής άρα παίρνουμε αντίστοιχα τις παρακάτω σχέσεις: $a_1 = 0$, $a_4 = 0$, $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 0$. Άρα οι κωνικές που διέρχονται από τα σημεία $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$, $(1,1,1)$ είναι της μορφής $a_2XY + a_3XZ + (-a_2 - a_3)YZ = 0$. Δηλαδή $a_2Y(X-Z) + a_3Z(X-Y) = 0$ και αποτελούν ένα γραμμικό σύστημα διάστασης 1.

Θεώρημα 9 Αν δύο καμπύλες βαθμού n τέμνονται σε n^2 διαφορετικά σημεία και ακριβώς mn από αυτά βρίσκονται πάνω σε μία ανάγωγη καμπύλη βαθμού m, τότε τα υπόλοιπα $n(n-m)$ βρίσκονται πάνω σε μία καμπύλη βαθμού τάξης $n-m$.

Απόδειξη Έστω $V(F_1), V(F_2)$ οι δύο καμπύλες βαθμού n, που τέμνονται σε n^2 διαφορετικά σημεία και $V(G)$ είναι η ανάγωγη καμπύλη βαθμού m, που διέρχεται από mn από αυτά τα n^2 σημεία. Μπορούμε να βρούμε κατάλληλα s_1, s_2 έτσι ώστε η καμπύλη $V(s_1F_1+s_2F_2)$ να διέρχεται από οποιοδήποτε δοσμένο σημείο A, για παράδειγμα $s_1 = F_2(A)$, $s_2 = -F_1(A)$. Αν διαλέξουμε αυτό το σημείο στην $V(G)$, τότε η $V(G)$ και η $V(s_1F_1+s_2F_2)$ έχουν τουλάχιστον $mn+1$ κοινά σημεία και άρα έχουν κοινή συνιστώσα, που αναγκαστικά είναι η $V(G)$ αφού G είναι ανάγωγη. Συνεπώς $s_1F_1 + s_2F_2 = GH$, για κάποιο πολυώνυμο H βαθμού $n-m$. Η καμπύλη $V(s_1F_1 + s_2F_2) = V(G) \cup V(H)$ διέρχεται από τα n^2 σημεία (κάθε κοινό σημείο των $V(F_1), V(F_2)$ είναι και σημείο της $V(s_1F_1 + s_2F_2)$). Επίσης αφού η $V(G)$ διέρχεται από ακριβώς mn από αυτά τα σημεία, τα υπόλοιπα $n(n-m)$ βρίσκονται πάνω στην καμπύλη $V(H)$.

Θεώρημα 10 (*Pascal*) Τα ζευγάρια των ευθειών που ορίζονται από τις απέναντι πλευρές ενός εξαγώνου εγγεγραμμένου σε μιά ανάγωγη κωνική $V(Q)$, συναντιούνται σε συνευθειακά σημεία.

Απόδειξη Ας είναι $L_1, L_2, L_3, L_4, L_5, L_6$ οι ευθείες των πλευρών του εξαγώνου, γραμμένες διαδοχικά ξεκινώντας από κάποια τυχαία. Οι δύο κυβικές $L_1L_3L_5$ και $L_2L_4L_6$ τέμνονται στις έξι κορυφές του εξαγώνου και στα τρία σημεία που θέλουμε να δείξουμε ότι είναι συνευθειακά. Από τα $9 = 3^2$ κοινά σημεία τα 6 βρίσκονται στην ανάγωγη κωνική $V(Q)$, άρα από το προηγούμενο θεώρημα τα υπόλοιπα 3 βρίσκονται σε μια ευθεία.

Θεώρημα 11 (των εννέα σημείων) Αν δύο κυβικές τέμνονται σε ακριβώς 9 σημεία, τότε κάθε κυβική που διέρχεται από οκτώ από αυτά, διέρχεται και από το ένατο.

Απόδειξη Έστω F_1, F_2 οι δύο κυβικές που τέμνονται στα εννέα σημεία $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, P_8, P_9$ και F μια κυβική που διέρχεται από τα οκτώ σημεία $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, P_8$.

Αν η F είναι γραμμικά εξαρτημένη από τις F_1, F_2, δηλαδή $F = s_1F_1 + s_2F_2$ για κάποια s_1, s_2 τότε η $V(F)$ διέρχεται και από το σημείο P_9, αφού οι F_1, F_2 διέρχονται από αυτό. Αν η F είναι γραμμικά ανεξάρτητη από τις F_1, F_2, τότε μπορούμε να διαλέξουμε k, l, s έτσι ώστε η καμπύλη $V(kF_1+lF_2+sF)$ να διέρχεται από οποιαδήποτε δύο δοσμένα σημεία, που θα μας οδηγήσει σε άτοπο.

Θα ξεκινήσουμε κάνοντας κάποιες παρατηρήσεις:

- Από τα 9 σημεία δεν υπάρχουν 4 στην ίδια ευθεία. Απόδειξη: Αν ήταν στην ίδια ευθεία, η ευθεία αυτή θα ήταν συνιστώσα των F_1, F_2 που είναι άτοπο, γιατί οι δύο καμπύλες έχουν ακριβώς 9 κοινά σημεία.

- Από τα 9 σημεία δεν υπάρχουν 7 στην ίδια κωνική. Απόδειξη: Αν ήταν στην ίδια κωνική, η κωνική αυτή (που είναι ανάγωγη, επειδή αλλιώς θα είχαμε τουλάχιστον 4 σημεία στην ίδια ευθεία, που είναι άτοπο σύμφωνα με το προηγούμενο) θα ήταν κοινή συνιστώσα των F_1, F_2 που είναι άτοπο, γιατί οι δύο καμπύλες έχουν ακριβώς 9 κοινά σημεία.

- Από τα 8 σημεία $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, P_8$ τρία δεν βρίσκονται στην ίδια ευθεία. Απόδειξη: Αν ήταν τα P_1, P_2, P_3 στην ίδια ευθεία $V(L)$, τότε τα P_4, P_5, P_6, P_7, P_8 θα βρίσκονταν σε μια μοναδική κωνική $V(Q)$. (Οποιαδήποτε πέντε σημεία βρίσκονται πάνω σε μία τουλάχιστον κωνική, αφού για να καθορίσουμε μία κωνική αρκεί να υπολογίσουμε τους 6 συντελεστές της. Αυτό μπορούμε πάντα να το κάνουμε αφού έχουμε 5 ομογενείς εξισώσεις με 6 αγνώστους. Η κωνική είναι μοναδική, γιατί αν δύο διαφορετικές κωνικές έχουν τουλάχιστον 5 κοινά σημεία, τότε έχουν κοινή συνιστώσα ευθεία, από το θεώρημα του *Bezout*. Αλλά τότε οι άλλες συνιστώσες ευθείες έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, άρα θα έπρεπε τα 4 σημεία να ήταν συνευθειακά, που έρχεται σε αντίθεση με την πρώτη παρατήρηση.)

  Έστω A ένα άλλο σημείο της $V(L)$ και B ένα σημείο που δεν είναι σημείο ούτε της $V(Q)$ ούτε της $V(L)$. Η καμπύλη $V(kF_1+lF_2+sF)$ για κατάλληλα k, l, s διέρχεται από τα σημεία $A, B, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, P_8$ άρα έχει την $V(L)$ και την $V(Q)$ σαν συνιστώσες. (Αφού η $V(L)$ και η $V(kF_1 + lF_2 + sF)$ έχουν 4 κοινά σημεία, άρα η $V(L)$ είναι συνιστώσα της $V(kF_1+lF_2+sF)$ και άρα $kF_1+lF_2+sF = LQ'$ για κάποια δευτεροβάθμια Q'. Υπάρχει όμως μια μόνο δευτεροβάθμια που διέρχεται από τα P_4, P_5, P_6, P_7, P_8 η $V(Q)$.) Αλλά τότε $V(kF_1 + lF_2 + sF) = V(L) \cup V(Q)$ που είναι άτοπο επειδή το B δεν είναι σημείο ούτε της $V(Q)$ ούτε της $V(L)$.

- Από τα 8 σημεία $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, P_8$ έξι δεν βρίσκονται στην ίδια κωνική. Απόδειξη: Αν ήταν τα $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ στην ίδια κωνική $V(Q)$, τότε διαλέγοντας το A στην $V(Q)$ και το B ένα σημείο που δεν είναι ούτε στην $V(Q)$ ούτε στην $V(L_{78})$, όπου $V(L_{78})$ είναι η ευθεία που διέρχεται από τα P_7, P_8 καταλήγουμε σε άτοπο, όπως προηγουμένως.

Από τις προηγούμενες παρατηρήσεις συμπεραίνουμε ότι 3 σημεία, από τα P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, P_8, δεν βρίσκονται στην ίδια ευθεία και 6 σημεία δεν βρίσκονται στην ίδια κωνική. Τότε όμως θεωρώντας την ευθεία $V(L_{12})$ που διέρχεται από τα P_1, P_2 και την μοναδική κωνική $V(Q)$ που διέρχεται από τα P_3, P_4, P_5, P_6, P_7 και διαλέγοντας τα A, B στην $V(L_{12})$ καταλήγουμε σε άτοπο όπως προηγουμένως (επειδή το P_8 δεν βρίσκεται ούτε στην $V(L_{12})$ ούτε στην $V(Q)$). Ώστε η υπόθεση που κάναμε ότι η $V(F)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητη από τις $V(F_1)$, $V(F_2)$ ήταν λάθος.

Άρα η $V(F)$ διέρχεται και από το P_9.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Βρείτε δύο κυβικές που να τέμνονται σε ένα ακριβώς σημείο.

2. Δίνεται τρίγωνο ABC και σημεία D, E, Z έτσι ώστε D είναι σημείο της ευθείας BC, E είναι σημείο της ευθείας AC και Z είναι σημείο της ευθείας AB (τα έξι σημεία A, B, C, D, E, Z είναι διαφορετικά). Αποδείξτε ότι οι τρείς κύκλοι που ορίζονται από τις τριάδες των σημείων $(AZE), (DCE), (BDZ)$ έχουν ένα κοινό σημείο H.

3. Βρείτε όλες τις ανάγωγες κωνικές που διέρχονται από τα σημεία $(1, 0, 0)$, $(1, 0, 1)$, $(1, 1, 0)$ και εφάπτονται στις ευθείες $V(X - Y)$ και $V(X + Y)$.